

Bsp (Beweise)

- Geometrie (Pythagoras / Thales)
- Rechenregeln
- Identitäten / Umformungen
- Stochastik
- Logik, Äquivalenzen & Tautologien
- Mengen, Gleichheit
- • Aussagen über natürliche Zahlen
(z.B. $u^2 - 1$ ist teilbar durch 8,
für alle ungerade $u > 1$)

▷ Gegenbeispiel

! Soll man eine Aussage widerlegen,
so reicht es ein einziges Gegenbsp zu finden!

Bsp 1) Beh Alle geraden Zahlen > 2
sind durch 4 teilbar.
Falsch! Gegenbsp: 4 teilt nicht 6.

2) Beh: Es gibt keine eierlegende Säugetiere
Falsch! Gegenbsp: Schnabeltier

3) Beh: Alle Primzahlen sind ungerade
Falsch! Gegenbsp: 2

Beh 2: Alle Primzahlen außer 2 sind ungerade
Wahr!

► Natürliche Zahlen, Induktion

Für Aussagen über alle natürlichen Zahlen

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$
für alle natürlichen Zahlen n ↑ Aussage

Bsp $(n^2 + n \text{ ist gerade})$ für alle $n \in \mathbb{N}$

1. A) Überprüfe für $n=1$:
Induktionsanfang

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{ist gerade} \quad \checkmark$$

IV) Es gelte die Aussage " $n^2 + n \text{ ist gerade}$ "
Induktionsvoraussetzung für ein festes n

IS) $n \mapsto n+1$ (zeige, dass die Aussage
Induktionsschritt auch für die nächste Zahl, $n+1$, gilt)

z.z. $(n+1)^2 + (n+1)$ ist gerade

Trick: Formel um, benutzte IV

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\substack{\text{ist gerade} \\ \text{nach IV}}} + \underbrace{2n + 2}_{\substack{\text{gerade, da} \\ \text{Vielfachen von 2}}} \end{aligned}$$

Da alle Summanden gerade sind
 $\Rightarrow$ Summe gerade. $\checkmark$

Bsp

Beweise:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(bereits gesehen: kleine Gauss bzw. Summe der arithm. Folge)

IA) $n=1$:

links: $\sum_{i=1}^1 i = 1 \quad \checkmark$ rechts: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

IV) Es gelte: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein festes n

IS) $n \mapsto n+1$ z.z. $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) =$$

$\uparrow$ zur Erinnerung

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n i}_{\text{IV}} + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

□

► ~~Indirekter Beweis~~, Widerspruchsbeweis

Bsp: Beh. Alle Primzahlen > 2 sind ungerade.

Bew.

Annahme

Es gäbe eine Primzahl p
 $p > 2$, p gerade

Wir nehmen an,
dass die zu beweisende
Aussage falsch ist

$p > 2$, p gerade $\Rightarrow p = 2k$ mit $1 < k < p$

2 und k sind Teiler von p

↯ zur Annahme, dass p Primzahl ist.
Widerspruch

Die Annahme ist falsch $\Rightarrow$ die Aussage ist wahr

► Kombinatorik, systematisches Abzählen

Bsp Wieviel Bundesliga spieler gibt es pro Saison (18 Mannschaften, jede spielt 2 mal mit jeder)

1) Spieltage: 9 Paarungen pro Tag

$$\# \text{ Spieltage} = 34 = 2 \cdot 17 = 2(18-1)$$

Anzahl Gegner

2) Jede spielt 1 mal:
wieviel Paare gibt es

$$9 \cdot 34 = 10 \cdot 34 - 34 = 306$$

Binomialkoeff

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

$$\frac{17 \cdot 18}{2} = \sum_{i=1}^{17} i$$

$$2 \times \text{gespielt} : 2 \cdot 153 = 306$$

3) Jedes Team hat genau 17 Gegnern

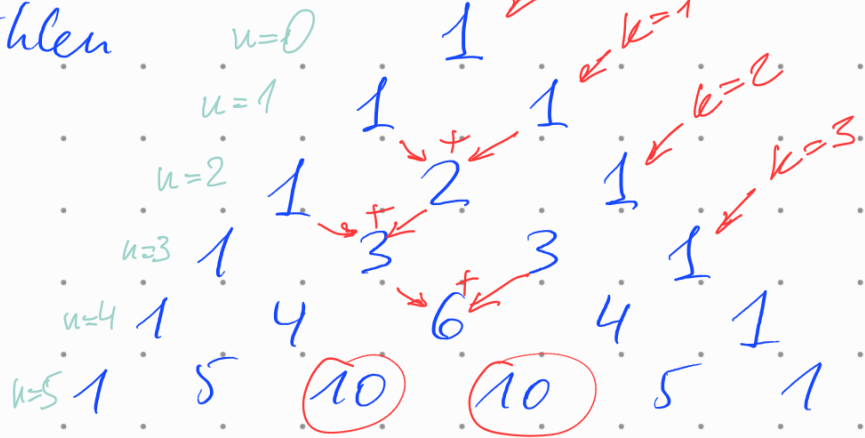
$$18 \cdot 17 = 306$$

(jedes Paar wurde dabei doppelt gezählt)

Binomialkoeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
 zählen die Möglich-
 keiten, k Objekte aus
 n auszuwählen $0! = 1$

Das Pascalsche
 Dreieck

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$



Bsp 5 Freunde haben 3 Freikarten bekommen
 Wieviel Mö gibt es, dies zu verteilen

falls a) Karten sind ununterscheidbar
 $\binom{5}{3} = 10$ oder $\binom{5}{2} = 10$
 die kriegen die kriegen nicht

b) unterscheidbar sind

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

← Karte Nr 3
 ← Karte Nr 2 verteilen
 ← Karte Nr 1 zu verteilen

Bsp 1) Wie viele verschiedene 10-stellige
 Zahlen kann man aus Ziffern 1 und 2
 konstruieren?

Ant: 2^{10} für jede Pos 2 Mö: 1 oder 2

2) 3 Einsen und 7 Zweien

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Wähle die Positionen
von Einsen (bzw. Zweien) aus

3) 10-stellige Zahlen aus 3 Einsen,
3 Zweien und 4 Dreien?